EGMO 2017 à Zürich

Pierre-Alain Jacqmin et Michel Sebille

Mots clés : EGMO, 2017, compétition.

Résumé. *L'EGMO 2017 s'est déroulée à Zürich. Nous donnons dans cet article les résultats de nos candidates belges et nous vous proposons les énoncés des six questions ainsi que les solutions de ces problèmes.*

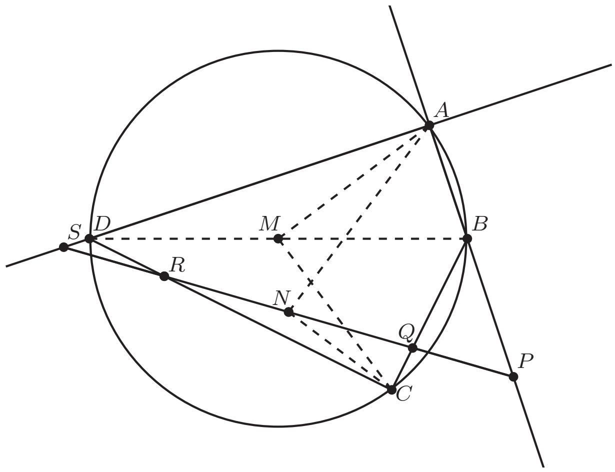
La compétition EGMO (European Girl's Mathematical Olympiad) en est à sa sixième édition. Créée afin d'encourager les jeunes filles à participer aux olympiades et à faire des études de mathématiques, l'EGMO connait un certain succès. Elle était organisée cette année par la Suisse à Zürich. Des participantes au nombre de 168 et venant de 43 pays (dont 33 pays européens) se sont affrontées. La Belgique était représentée par Ambre De Herde, Léa Dumont, Charlotte Léonard, Marie Peeters (participantes), Michel Sebille (leader) et Pierre-Alain Jacqmin (deputy leader).

La compétition s'est déroulée à l'ETH de Zürich, les participantes étant logées à l'auberge de jeunesse de la ville. Les participantes sont arrivées en TGV à Zürich Hauptbahnof le 6 avril et ont rejoint leurs quartiers. Le 7 avril, le jury a approuvé et traduit les questions tandis que les participantes découvraient la ville à l'aide d'un jeu de piste. Le soir, tout le monde s'est retrouvé pour la cérémonie d'ouverture et un apéro riche. Le 8 et le 9 au matin, les filles ont affronté les questionnaires autant redoutés qu'attendus tandis que le jury coordonnait les corrections futures. L'après-midi et en soirée, les participantes se détendaient par du sport et de la danse. Le 10, pendant que les coordinateurs et les correcteurs se mettaient d'accord, les participantes effectuaient la visite du zoo et une promenade en bateau. Le 11, après une excursion au mont Rigi en plein brouillard, se déroulait la cérémonie de proclamation. Le 12, les équipes ont pris le chemin du retour vers leur pays.

Au niveau du résultat, la Belgique a fini trente-cinquième sur quarante-quatre. Marie Peeters est 96$^{\text{e}}$, Charlotte Léonard 124$^{\text{e}}$, Ambre De Herde 140$^{\text{e}}$ et Léa Dumont 152$^{\text{e}}$. Marie Peeters et Charlotte Léonard ont en outre obtenu une mention honorable. La compétition individuelle a été remportée par l'Ukrainienne Olha Shevchenko et l'Américaine Qi Qi qui réalisent toute deux un score parfait de 42/42. La compétition par équipe est remportée par l'Ukraine avec un point d'avance sur la Russie. L'équipe des USA avait en réalité réalisé le meilleur score, mais seules les équipes européennes peuvent remporter le classement des nations.

Les questions, une nouvelle fois au nombre de six, étaient les suivantes :

Problème 1 *Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $|\widehat{DAB}| = |\widehat{BCD}| = 90°$ et $|\widehat{ABC}| > |\widehat{CDA}|$. Soient Q et R des points appartenant respectivement aux segments $[BC]$ et $[CD]$, tels que la droite QR coupe les droites AB et AD respectivement aux points P et S, de sorte que $|PQ| = |RS|$. Soit M le milieu du segment $[BD]$ et N celui du segment $[QR]$. Montrer que les points M, N, A et C appartiennent à un même cercle.*



Les solutions à cette question étaient quasiment toutes identiques à celle-ci ou utilisaient des arguments fort semblables. Les deux mentions honorables belges ont été obtenues sur ce problème.

Tout d'abord, puisque ABD est rectangle en A, le point M est le centre du cercle circonscrit à $ABCD$ livrant ainsi, grâce à quatre rayons, certains triangles isocèles. De même, N est le milieu de l'hypoténuse de CQR et donc CNR et CNQ sont isocèles en N. Mais N est aussi le milieu de $[PS]$ qui est l'hypoténuse de APS et les triangles ANS et ANP sont isocèles en N.

$$\begin{aligned}
|\widehat{ANC}| &= |\widehat{ANQ}| + |\widehat{QNC}| \\
&= 180^\circ - 2|\widehat{APN}| + 180^\circ - 2|\widehat{NQC}| && \text{(triangles isocèles)} \\
&= 2(180^\circ - |\widehat{APN}| - |\widehat{NQC}|) \\
&= 2|\widehat{QBP}| \\
&= 2(180^\circ - |\widehat{ABC}|) \\
&= 2|\widehat{ADC}| && \text{(angles opposés d'un quadrilatère cyclique)} \\
&= |\widehat{AMC}| && \text{(angle inscrit et angle au centre)}
\end{aligned}$$

Puisque ces deux angles interceptent le même segment et sont de même amplitude, les points A, M, N et C sont cocycliques.

Note : Il était convenu au sein du jury qu'il n'était pas demandé de prouver que les points M et N se situent du même côté de la droite AC. C'est une conséquence du fait l'angle en B du quadrilatère est plus grand que l'angle en D.

Problème 2 *Trouver le plus petit entier strictement positif k pour lequel il existe un coloriage à k couleurs des entiers strictement positifs $\mathbb{Z}_{>0}$ et une fonction $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ satisfaisant les deux conditions suivantes :*

(i) Pour tous les entiers strictement positifs m et n de même couleur, $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Il existe des entiers strictement positifs m et n tels que $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

Dans un coloriage à k couleurs de $\mathbb{Z}_{>0}$, chaque entier est colorié en une et une seule des k couleurs. Dans les deux conditions (i) et (ii), les entiers strictement positifs m et n ne sont pas nécessairement distincts.

Un tel coloriage avec une seule couleur est évidemment impossible. Montrons que 2 couleurs ne suffisent pas non plus. Supposons que $c\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \{B, N\}$ soit un coloriage de $\mathbb{Z}_{>0}$ et f une fonction satisfaisant les conditions (i) et (ii). Par la condition (i), $f(2n) = 2f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Notons par a le plus petit entier strictement positif tel que $f(a) \neq af(1)$ (un tel a existe car la fonction $f(x) = xf(1)$ ne satisfait pas la condition (ii)). Dès lors, $f(n) = nf(1)$ pour tout $n < a$. Si a est pair, $f(a) = 2f\left(\frac{a}{2}\right) = 2\frac{a}{2}f(1) = af(1)$, ce qui absurde. Donc a est impair et nous pouvons en déduire que

$$f(a+1) = 2f\left(\frac{a+1}{2}\right) = 2\frac{a+1}{2}f(1) = (a+1)f(1)$$

puisque $\frac{a+1}{2} < a$. Si $c(a) = c(1)$, nous aurions $(a+1)f(1) = f(a+1) = f(a) + f(1)$, ce qui est absurde. Par conséquent, $c(a) \neq c(1)$. De plus, si $c(a-n) = c(n)$ pour un certain $1 \leqslant n \leqslant a-1$, nous aurions $f(a) = f(a-n) + f(n) = (a-n)f(1) + nf(1) = af(1)$, ce qui est absurde. D'où $c(a-n) \neq c(n)$ pour chaque $1 \leqslant n \leqslant a-1$ et donc $c(a) = c(a-1)$. De même, si $c(a-2) = c(a)$, nous pourrions en déduire que

$$(2a-2)f(1) = 2f(a-1) = f(2a-2) = f(a) + f(a-2) = f(a) + (a-2)f(1).$$

Or $f(a) \neq af(1)$, donc $c(a-2) \neq c(a)$ et $c(a-2) = c(1)$. Puisque $c(a-2) \neq c(2)$, nous savons que $c(2) = c(a) = c(a-1)$. Si $c(2a-2) = c(2)$, nous aurions que

$$2f(a) = f(2a) = f(2a-2) + f(2) = 2f(a-1) + 2f(1) = 2af(1),$$

ce qui est absurde. Donc $c(2a-2) = c(a-2) = c(1)$. Finalement,

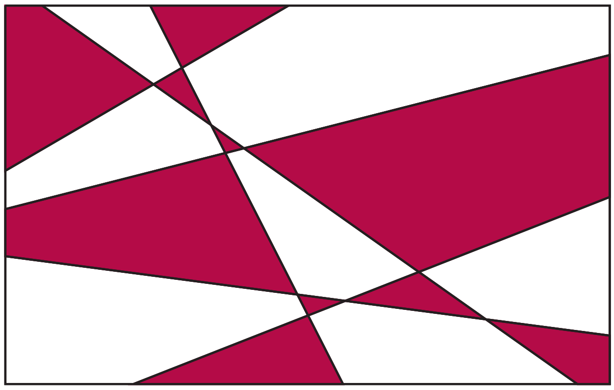
$$\begin{aligned} f(a) + (a-1)f(1) = f(a) + f(a-1) = f(2a-1) &= f(2a-2) + f(1) \\ = 2f(a-1) + f(1) &= (2a-1)f(1), \end{aligned}$$

ce qui est aussi une contradiction.

Montrons maintenant un exemple avec 3 couleurs : il suffit de colorier les nombres de la forme $3m$ en noir, les nombres de la forme $3m+1$ en jaune et les nombres de la forme $3m+2$ en rouge. Nous pouvons alors définir la fonction f comme étant $f(n) = 2n$ si n est divisible par 3 et $f(n) = n$ sinon.

Problème 3 *Soient 2017 droites dans le plan telles qu'il n'en existe pas trois s'intersectant en un même point. Turbo l'escargot se trouve sur un point n'appartenant qu'à une seule droite. Il se déplace le long des droites de la façon suivante. Il se meut sur une droite donnée jusqu'à ce qu'il arrive à une intersection. À chaque fois qu'il rencontre une intersection, il continue son parcours sur l'autre droite, tournant à gauche ou à droite, alternant son choix à chaque intersection rencontrée. Aucun demi-tour n'est permis. Est-il possible qu'il parcoure un même segment de droite dans deux sens opposés durant son parcours ?*

Il existe un lemme que les anglophones appellent le lemme des deux couleurs qui dit que les droites déterminent des zones du plan qui peuvent être coloriées en deux couleurs de telle sorte que deux zones partageant une frontière ne sont pas de la même couleur comme sur la figure ci-dessous. Une démonstration de ce lemme par récurrence est assez aisée.



Si, à une intersection, Turbo tourne à gauche, il gardera la même zone à sa gauche et donc la même couleur. Il en va de même s'il tourne à droite. Puisqu'il garde sans cesse la même couleur à gauche et la même couleur à droite, il ne pourra jamais parcourir un segment dans deux sens différents.

Il ne doit donc même pas tourner alternativement à gauche et à droite ; seule la condition imposant de tourner à chaque intersection rencontrée est utilisée.

Problème 4 *Soit $n \geqslant 1$ un entier et soient $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ des entiers strictement positifs. Dans un groupe de t_n+1 personnes, des parties d'échecs sont jouées. Deux personnes peuvent jouer l'une contre l'autre au plus une fois. Prouver qu'il est possible que les deux propositions suivantes soient satisfaites en même temps :*

(i) *Le nombre de parties jouées par chaque personne appartient à l'ensemble $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$.*

(ii) *Pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe une personne qui a joué exactement t_i parties.*

Il s'agit de construire un graphe de $t_n + 1$ sommets, dont l'ensemble des degrés est exactement $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. Prouvons le résultat par induction sur n. Pour $n = 1$, il suffit de considérer le graphe complet à $t_1 + 1$ sommets. Pour $n = 2$, on peut relier t_1 sommets à tous les autres, et chacun des $t_2 - t_1 + 1$ sommets restants seulement aux t_1 premiers sommets.

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour $n - 2$ et $n - 1$ et prouvons-le pour $n \geqslant 3$. Pour ce faire, nous séparons les sommets en 3 groupes : le groupe 1 avec t_1 sommets, le groupe 2 avec $t_n - t_{n-1}$ sommets et le groupe 3 avec $t_{n-1} - t_1 + 1$ sommets. Nous relions tous les sommets du groupe 1 avec tous les t_n autres sommets. Les sommets du groupe 2 ne seront pas plus reliés, ils auront donc un degré t_1. Enfin, les sommets du groupe 3 sont reliés entre eux de manière à former un sous-graphe dont l'ensemble des degrés est exactement $\{t_2 - t_1, \ldots, t_{n-1} - t_1\}$ (ce qui est possible, grâce à notre hypothèse d'induction). Le graphe obtenu est alors celui recherché.

Problème 5 *Soit $n \geqslant 2$ un entier. Un n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ d'entiers strictement positifs et non nécessairement distincts est dit onéreux s'il existe un entier strictement positif k tel que*

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) *Trouver tous les entiers $n \geqslant 2$ pour lesquels il existe un n-uplet onéreux.*

b) *Montrer que pour tout entier impair positif m il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que m appartient à un n-uplet onéreux.*

Le membre de gauche contient exactement n facteurs.

a) Si n est impair, le n-uplet $(1, \ldots, 1)$ est évidement onéreux. Prouvons qu'il n'existe pas de n-uplet onéreux pour n pair. Si $n = 2$, (a_1, a_2) est onéreux si $(a_1 + a_2)^2 = 2^{2k-1}$ pour un certain entier strictement positif k ; ce qui est impossible puisque 2^{2k-1} n'est pas un carré parfait. Pour conclure la preuve, il reste à montrer que s'il existe un n-uplet onéreux pour un $n \geqslant 4$, alors il existe aussi un $(n-2)$-uplet onéreux :
Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ un n-uplet onéreux. Dans ce qui suit, nous considérerons les indices modulo n. Soit a_t le plus grand des a_i. Nous pouvons écrire les inégalités

$$a_{t-1} + a_t \leqslant 2a_t < 2(a_t + a_{t+1})$$

$$a_t + a_{t+1} \leqslant 2a_t < 2(a_{t-1} + a_t).$$

Puisque $a_{t-1} + a_t$ et $a_t + a_{t+1}$ sont deux puissances de 2, nous déduisons de ces deux inégalités que

$$a_{t-1} + a_t = a_t + a_{t+1} = 2^r$$

pour un certain entier strictement positif r. En particulier, $a_{t-1} = a_{t+1}$. Écrivons maintenant $(b_1, \ldots, b_{n-2})$ pour le $(n-2)$-uplet obtenu à partir de $(a_1, \ldots, a_n)$ en lui retirant a_t et a_{t+1}. Dès lors,

$$\prod_{i=1}^{n-2} b_i + b_{i+1} = \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i + a_{i+1}}{(a_{t-1} + a_t)(a_t + a_{t+1})} = 2^{2(k-r)-1},$$

prouvant que $(b_1, \ldots, b_{n-2})$ est onéreux.

b) Prouvons-le par induction. Nous avons vu au point précédent que 1 appartenait à un n-uplet onéreux. Supposons maintenant que tous les entiers positifs impairs inférieurs à 2^k appartiennent à un n-uplet onéreux, pour un certain $k \geqslant 1$. Donc, pour tout entier impair r tel que $1 \leqslant r < 2^k$, il existe un n-uplet onéreux $(a_1, \ldots, r, \ldots, a_n)$. Il suffit alors de remarquer que $(a_1, \ldots, r, 2^{k+1} - r, r, \ldots, a_n)$ est un $(n+2)$-uplet onéreux. Puisque $2^{k+1} - r$ peut prendre toutes les valeurs impaires entre 2^k et 2^{k+1}, ceci conclu la récurrence.

Problème 6 *Soit ABC un triangle ayant trois angles aigus et dont les trois côtés sont de longueurs deux à deux différentes. Les symétriques du centre de gravité G et du centre O du cercle circonscrit à ABC par rapport aux côtés BC, CA et AB sont notés respectivement G_1, G_2, G_3 et O_1, O_2, O_3. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A et ABC passent tous par un même point.*

Le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection des trois médianes. Une médiane est une droite reliant un sommet du triangle au milieu du côté opposé.

Pour commencer, on prouve un résultat général sur les points intérieurs au triangle ABC. Soit P un tel point et P_1, P_2, P_3 ses symétriques par rapport aux droites BC, AC, AB. Le cercle circonscrit à CP_1P_2 recoupe le cercle circonscrit à ABC en X_P. Par symétrie, $|CP_1| = |CP| = |CP_2|$ et $|AP_2| = |AP| = |AP_3|$. Les triangles CP_1P_2 et AP_2P_3 sont donc isocèles en C et A et donc $|\widehat{CP_1P_2}| = |\widehat{CP_2P_1}|$ et $|\widehat{AP_2P_3}| = |\widehat{AP_3P_2}|$. Puisque par symétrie, $|\widehat{P_1CP_2}| = 2|\widehat{ACB}|$ et $|\widehat{P_2AP_3}| = 2|\widehat{BAC}|$,

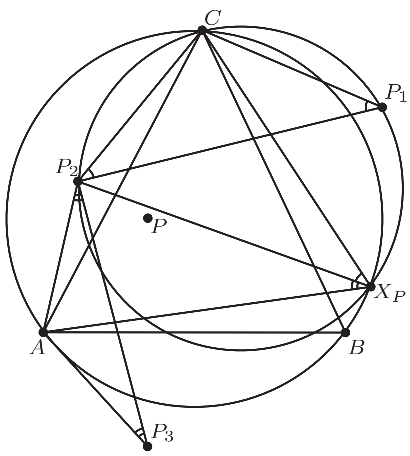
$$|\widehat{CP_1P_2}| = 90° - \frac{1}{2}|\widehat{P_1CP_2}| = 90° - |\widehat{ACB}| \qquad \text{et} \qquad |\widehat{AP_3P_2}| = 90° - \frac{1}{2}|\widehat{P_2AP_3}| = 90° - |\widehat{BAC}|.$$

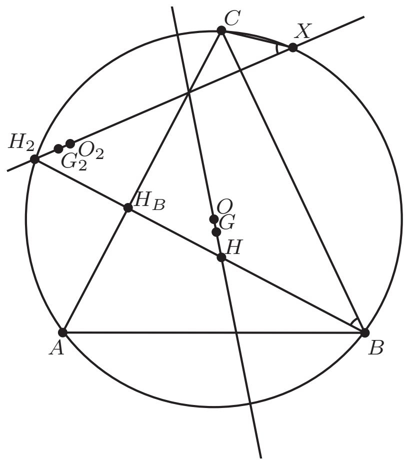
Montrons que X_P appartient au cercle circonscrit à AP_2P_3.

$$
\begin{aligned}
|\widehat{AX_PP_2}| &= |\widehat{CX_PA}| - |\widehat{CX_PP_2}| \\
&= |\widehat{ABC}| - |\widehat{CP_1P_2}| && \text{(angles inscrits)} \\
&= |\widehat{ABC}| - 90^\circ + |\widehat{ACB}| && \text{(égalité ci-dessus)} \\
&= 90^\circ - |\widehat{BAC}| \\
&= |\widehat{AP_3P_2}| && \text{(égalité ci-dessus)}
\end{aligned}
$$

De semblable manière, on prouve que X_P appartient au cercle circonscrit à BP_1P_3.

On a donc prouvé que tout point intérieur à ABC détermine un point X_P du cercle circonscrit qui appartient aussi aux cercles circonscrits à AP_2P_3, BP_1P_3 et CP_1P_2. On peut donc réécrire le problème 6 de la manière suivante : prouver que $X_G = X_O$.





Le point X_P peut être défini à partir de P_2 de la manière suivante : l'unique point du cercle circonscrit à ABC tel que $|\widehat{CX_PP_2}| = 90^\circ - |\widehat{ACB}|$. On doit donc trouver un point X de ce cercle tel que $|\widehat{CXG_2}| = |\widehat{CXO_2}| = 90^\circ - |\widehat{ACB}|$.

La droite OG est la droite d'Euler et passe donc par l'orthocentre H. Les points O, G et H étant alignés, leurs images par une symétrie orthogonale O_2, G_2 et H_2 sont aussi alignés. De plus, il est connu que H_2 appartient au cercle circonscrit au triangle ABC. Soit X l'autre point d'intersection de G_2H_2 avec ce cercle. L'alignement nous dit que $|\widehat{CXO_2}| = |\widehat{CXG_2}| = |\widehat{CXH_2}|$. Mais par le théorème de l'angle inscrit, $|\widehat{CXH_2}| = |\widehat{CBH_2}| = |\widehat{CBH_B}|$. Soit H_B le pied de la hauteur issue de B. Le triangle BCH_B est rectangle en H_B, $|\widehat{CBH_2}| = 90^\circ - |\widehat{ACB}|$ et on a prouvé que $X_G = X_O$.

Remarque : La seule propriété réellement spécifique à O et G qui a été utilisée est que la droite OG contient H. La preuve fonctionne donc pour toute paire de points d'une droite passant par H.

Pierre-Alain Jacqmin et Michel Sebille sont députy leader et leader de la délégation belge à l'EGMO. ✉ msebille@fulladsl.be